

6. Corrigés des exercices d'entraînement et de préparation au DS

Exercice 5.A :

- 1 On lit dans le tableau que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
- 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$, et en particulier l'intervalle $]100 ; +\infty[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.
Cela signifie qu'il existe un réel x_0 tel que tous les nombres strictement supérieurs à x_0 ont une image par f strictement supérieure à 100.

Exercice 5.B :

- 1

x	-1		3		7
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	1
- 2 a. $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ donc la droite d_1 d'équation $x = -1$ est une asymptote « verticale » à $\mathcal{C}_f$.
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$ donc la droite d_2 d'équation $x = 3$ est une asymptote « verticale » à $\mathcal{C}_f$.
b. On commence par tracer les deux asymptotes d_1 et d_2 . Puis, on peut tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ en prenant en compte les variations de la fonction f et ses limites en -1 et en 3.

Exercice 5.C :

- 1 On calcule la limite de chaque terme, puis on utilise les règles pour la somme.
 - a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 = 7$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ donc par règle pour le produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3) = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-9) = -9$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ donc par règle pour le produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-9x^2) = -\infty$.
Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 9x^2) = -\infty$.
Et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 9x^2 + 2) = -\infty$.
 - b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (2x + 3) = 3$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3 \right) = -\infty$.
 - c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 7x + 1) = +\infty$.
- 2 On calcule la limite de chaque facteur, puis on utilise les règles pour le produit.
 - a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (2 - x) = -\infty$.
 - b. $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 3) = -3$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$ } donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 3) \left(2 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$.
 - c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x) = 2$.
Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x) = 6$.

Exercice 5.D :

• **Limite en $+\infty$:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x + 2) = +\infty$

donc par règle pour la somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• **Limite en $-\infty$:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x + 2) = -\infty$.

On est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » : on ne peut pas conclure.

Pour calculer cette limite, il faut donc utiliser une autre expression de f .

On factorise le polynôme $x^2 + 5x + 2$ par son terme de plus haut degré.

Pour tout réel x non nul, $f(x) = x^2 + 5x + 2 = x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} \right) = x^2 \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 = 5$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 \times \frac{1}{x} \right) = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 \times \frac{1}{x^2} \right) = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 1$ } donc par règle pour le produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 5.E :

• **Limite de f en 4 :** $\lim_{x \rightarrow 4} (-x + 4) = 0$. La limite de l'inverse sera donc infinie.

Pour déterminer s'il s'agit de $-\infty$ ou de $+\infty$, on doit étudier le signe de $-x + 4$ selon les valeurs de x .

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-x + 4$	+	0	-

$\lim_{x \rightarrow 4} (-x + 4) = 0$ et pour $x > 4$, $-x + 4 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 4} (-x + 4) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$.

Limite de f en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 4) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

• **Limite de g en 4 :**

$\lim_{x \rightarrow 4} (3x) = 12$
 $\lim_{x \rightarrow 4} (-x + 4) = 0^-$ } donc par règle pour le quotient $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\infty$.

Limite de g en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 4) = -\infty$.

On est en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » : on ne peut pas conclure.

On doit donc modifier l'expression de g . On peut factoriser le dénominateur par x , puis simplifier.

Pour tout réel x de $]4; +\infty[$, $g(x) = \frac{3x}{-x + 4} = \frac{3x}{x \left(-1 + \frac{4}{x} \right)} = \frac{3}{-1 + \frac{4}{x}}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{4}{x} \right) = -1$ } donc par règle du quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3$.

Exercice 5.F :

1 $g = v \circ u$ avec $u(x) = 2 - 3x$ et $v(X) = e^X$

• Limite de g en $-\infty$:

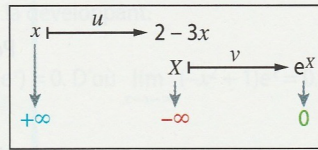
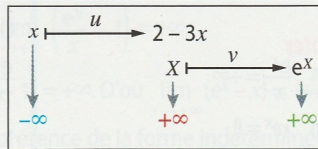
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

• Limite de g en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 3x) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$



2 $h(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2 - 3x$.

Ainsi : $h = w \circ u$, avec $w(X) = X^4$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} X^4 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 3x) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} X^4 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Exercice 5.G :

1 Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $x - 1 \leq x + \cos(x) \leq x + 1$, soit $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

2 a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$.

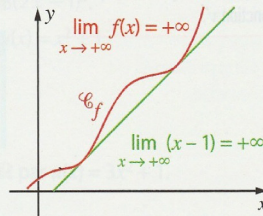
L'inégalité $f(x) \leq x + 1$ ne permet pas de déterminer la limite de f en $+\infty$.

On peut en effet trouver des fonctions vérifiant cette inégalité et de limites différentes.

Par contre, l'inégalité $x - 1 \leq f(x)$ permet d'appliquer l'un des théorèmes de comparaison :

$$x - 1 \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$



b. On sait que pour tout réel x , $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

On doit diviser chaque membre de cet encadrement par x et donc se placer dans un intervalle où on connaît le signe de x .

Comme on cherche la limite en $+\infty$, on se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour tout réel } x > 0, \frac{x-1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x+1}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{Donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Exercice 5.H :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (par croissances comparées) donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - xe^x) = 2$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$: on est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On transforme l'expression $e^x - x$ en factorisant par x .

$$\text{Pour } x \neq 0, e^x - x = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (par croissances comparées) donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: on est en présence de la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». On transforme l'expression $(-x^2 + 1)e^x$ en la développant.

Pour tout réel x , $(-x^2 + 1)e^x = -x^2e^x + e^x$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2e^x + e^x) = 0. \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x = 0.$$

$$\text{d. Pour } x \neq 0, \frac{e^{3x}}{x} = 3 \times \frac{e^{3x}}{3x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{3x} = +\infty$$

$$\text{et par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \times \frac{e^{3x}}{3x} \right) = +\infty. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty.$$